Шәкір Айдос

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

12-лекция. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом прямых. Эллиптические уравнения

Цель лекции – изучение метода прямых для численного решения уравнения Пуассона, освоение принципов пространственной дискретизации, построения разностных схем и анализа сходимости и устойчивости получаемых численных решений.

План лекции:

1 Метод прямых для уравнения Пуассона

При замене линейного дифференциального уравнения второго порядка системой уравнений метода прямых, вообще говоря, получается ошибка порядка h^2, где h — расстояние между прямыми. Эту ошибку можно уменьшить, если воспользоваться более точными формулами численного дифференцирования. Покажем это на примере уравнения Пуассона.

Пусть в прямоугольной области $R\{a \le x \le b;\ \alpha \le y \le \beta\}$ задано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{1.1}$$

и требуется найти решение $u := u(x, y)$ этого уравнения, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\begin{aligned} &u(x, \alpha) = \varphi_0(x), \quad u(x, \beta) = \varphi_1(x); \\ &u(a, y) = \psi_0(y), \quad u(b, y) = \psi_1(y), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где функции f и ψ_k $(k = 0, 1)$ непрерывны и $\varphi_k \in C^{(2)}[a, b]$ $(k = 0, 1)$. Будем решать краевую задачу (1.1)–(1.2) методом прямых. Для этого выберем шаг $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$ и через точки деления $y_j = y_0 + hj$

$(j = 0, 1, 2, \ldots, n;\ y_0 = \alpha,\ y_n = \beta)$ проведем параллели $y = y_j$. Пусть $u_j(x) = u(x, y_j)$. Предполагая, что функция $u(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по y до шестого порядка включительно, разложим функции $u_{j+1}(x) = u(x, y_j + h)$ и $u_{j-1}(x) = u(x, y_j - h)$ по формуле Тейлора с точностью до $O(h^6)$. Имеем

$$u_{j+1}(x) = u_j(x) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_j)h + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j)\frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y_j)\frac{h^3}{6} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y_j)\frac{h^4}{24} + \frac{\partial^5 u}{\partial y^5}(x, y_j)\frac{h^5}{120} + O(h^6) \quad (1.3)$$

и

$$u_{j-1}(x) = u_j(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_j)h + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j)\frac{h^2}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y_j)\frac{h^3}{6} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y_j)\frac{h^4}{24} - \frac{\partial^5 u}{\partial y^5}(x, y_j)\frac{h^5}{120} + O(h^6). \quad (1.4)$$

Сложив равенства (1.3) и (1.4), получим

$$u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j)h^2 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y_j)\frac{h^4}{12} + O(h^6). \quad (1.5)$$

Заменяя в формуле (1.5) функцию

$$u_k(x) = u(x, y_k) \quad (k = j+1, j, j-1)$$

соответствующими вторыми производными и ограничиваясь членами порядка h^2, будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j+1}) - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j-1}) = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y_j)h^2 + O(h^4). \quad (1.6)$$

Исключая из формул (1.5) и (1.6) производную $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y_j)$ и отбрасывая члены порядка h^6, получим приближенную формулу

$$u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) = \frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j+1}) + 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j-1})\right],$$

которая после приведения подобных членов принимает вид

$$u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) = \frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j+1}) + 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j-1})\right]. \quad (1.7)$$

Формула (1.7), имеющая точность $O(h^6)$, может быть использована для решения краевой задачи (1.1)—(1.2). Действительно, из уравнения (1.1) при $y = y_k$ имеем

$$\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} = f_k(x) - u_k''(x), \quad (1.8)$$

где $f_k(x) = f(x, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Отсюда, заменяя в формуле (1.7) вторые частные производные по y их значениями из формулы (1.8), для определения решений $u_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u_{j+1}''(x) + 10u_j''(x) + u_{j-1}''(x) + \frac{12}{h^2}\left[u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x)\right] = f_{j+1}(x) + 10f_j(x) + f_{j-1}(x) \quad (1.9)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Эта усовершенствованная система (1.9) метода прямых была предложена М. Г. Слободянским [23] и аппроксимирует уравнение Пуассона с точностью до $\frac{12}{h^2}O(h^6) = O(h^4)$. На основании краевых условий (1.2) дополнительно получаем:

$$u_0(x) = \varphi_0(x), \quad u_n(x) = \varphi_1(x); \quad u_j(a) = \psi_0(y_j), \quad u_j(b) = \psi_1(y_j). \tag{1.10}$$

Отсюда

$$u_0''(x) = \varphi_0''(x), \quad u_n''(x) = \varphi_1''(x).$$

Общее решение системы (1.9), как известно, складывается из частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы

$$v_{j+1}''(x) + 10v_j''(x) + v_{j-1}''(x) + \frac{12}{h^2}\left[v_{j+1}(x) - 2v_j(x) + v_{j-1}(x)\right] = 0. \tag{1.11}$$

Очевидно, что общее решение системы (1.11) не зависит от области R и краевых условий (1.2) и для данного уравнения (1.1) может быть получено раз и навсегда. Приведем без доказательства (см. [22]) формулы общего решения системы (1.11):

$$v_j(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k(y_j - y_0)}{l}\left(A_k e^{\sigma_k x} + B_k e^{-\sigma_k x}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где $l = \beta - \alpha$, A_k и B_k — произвольные постоянные, а

$$\sigma_k^2 = \frac{24}{h^2} \cdot \frac{\sin^2\frac{\pi k h}{2l}}{1 + 5\sin^2\frac{\pi k h}{2l}}.$$

Частное решение неоднородной системы (1.9) находится обычным путем, в крайнем случае можно применить метод вариации произвольных постоянных. Для отыскания постоянных A_k и B_k на основании условий (1.10) получается алгебраическая система $2n-2$ уравнений.

Пример В области $R\{0 \le x \le 3;\ 0 \le y \le 3\}$ задано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y. \tag{1.12}$$

Методом прямых найти решение этого уравнения, удовлетворяющее однородным краевым условиям

$$u(0, y) = u(3, y) = u(x, 0) = u(x, 3) = 0. \tag{1.13}$$

Решение. Примем $h = 1$ и проведем прямые $y = 1$ и $y = 2$. Используя метод прямых, будем искать приближенное решение $u_j(x) = u(x, y_j)$ $(j = 1, 2)$ задачи (1.12)—(1.13) на прямых $y = y_1$ и $y = y_2$, где

$y_1 = 1$ и $y_2 = 2$. Выписывая систему (1.9), получим следующие два уравнения:

$$
\begin{aligned}
&u_2''(x) + 10u_1''(x) + u_0''(x) + 12\big[u_2(x) - 2u_1(x) + u_0(x)\big] = (x+2) + 10(x+1) + (x+0),\\
&u_3''(x) + 10u_2''(x) + u_1''(x) + 12\big[u_3(x) - 2u_2(x) + u_1(x)\big] = (x+3) + 10(x+2) + (x+1).
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

В силу краевых условий (1.13) имеем $u_0(x) = u_3(x) = 0$, и, следовательно,

$$u_0''(x) = u_3''(x) = 0.$$

Система (1.14) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&10u_1''(x) + u_2''(x) - 24u_1(x) + 12u_2(x) = 12x + 12,\\
&u_1''(x) + 10u_2''(x) + 12u_1(x) - 24u_2(x) = 12x + 24,
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

причем

$$u_1(0) = u_1(3) = 0, \quad u_2(0) = u_2(3) = 0. \tag{1.16}$$

Соответствующая однородная система имеет вид

$$
\begin{aligned}
&10v_1''(x) + v_2''(x) - 24v_1(x) + 12v_2(x) = 0,\\
&v_1''(x) + 10v_2''(x) + 12v_1(x) - 24v_2(x) = 0.
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

Полагая

$$v_1(x) = Ae^{\lambda x}, \quad v_2(x) = Be^{\lambda x} \tag{1.18}$$

и подставляя эти выражения в систему (1.17), после сокращения на $e^{\lambda x}$ получаем

$$
\begin{aligned}
&A(10\lambda^2 - 24) + B(\lambda^2 + 12) = 0,\\
&A(\lambda^2 + 12) + B(10\lambda^2 - 24) = 0.
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

Так как мы предполагаем, что решение (1.18) ненулевое, то определитель линейной системы (1.19) должен быть равен нулю. Отсюда получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 10\lambda^2 - 24 & \lambda^2 + 12 \\ \lambda^2 + 12 & 10\lambda^2 - 24 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(10\lambda^2 - 24)^2 - (\lambda^2 + 12)^2 = 0.$$

т. е.

$$(9\lambda^2 - 36)(11\lambda^2 - 12) = 0. \tag{1.20}$$

Следовательно, характеристические корни будут

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{12}{11}}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{\frac{12}{11}}.$$

Соответствующие постоянные A и B определяются из системы (1.19). Имеем

$$\frac{A}{\lambda^2 + 12} = -\frac{B}{10\lambda^2 - 24} = C;$$

отсюда

$$\frac{A_k}{16} = -\frac{B_k}{16} \quad (k = 1, 2);$$
$$\frac{A_k}{144/11} = \frac{B_k}{144/11} \quad (k = 3, 4).$$

Можно принять $A_k = -B_k = C_k$ $(k = 1, 2)$, $A_k = B_k = C_k$ $(k = 3, 4)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-x\sqrt{12/11}}, \\ v_2(x) &= -C_1 e^{2x} - C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-x\sqrt{12/11}}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Частное решение системы (1.15) ищем в виде

$$\tilde{u}_1(x) = Ax + B, \quad \tilde{u}_2(x) = Cx + D.$$

Подставляя эти выражения в систему (1.15), для определения постоянных A, B, C, D получаем систему

$$-2A + C = 1, \quad -2B + D = 1,$$

$$A - 2C = 1, \quad B - 2D = 2.$$

Отсюда находим: $A = C = -1$, $B = -4/3$, $D = -5/3$, и, значит,

$$\tilde{u}_1(x) = -\left(x + \frac{4}{3}\right), \quad \tilde{u}_2(x) = -\left(x + \frac{5}{3}\right). \tag{1.22}$$

На основании формул (1.21) и (1.22) общее решение системы (1.15) имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-x\sqrt{12/11}} - \left(x + \frac{4}{3}\right), \\ u_2(x) &= -C_1 e^{2x} - C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-x\sqrt{12/11}} - \left(x + \frac{5}{3}\right). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 используем граничные условия (1.16). В силу этих условий и формул (1.23) получаем систему

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= \frac{4}{3}, \\ -C_1 - C_2 + C_3 + C_4 &= \frac{5}{3}, \\ C_1 e^{6} + C_2 e^{-6} + C_3 e^{3\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-3\sqrt{12/11}} &= \frac{13}{3}, \\ -C_1 e^{6} - C_2 e^{-6} + C_3 e^{3\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-3\sqrt{12/11}} &= \frac{14}{3}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Отсюда

$$C_1 = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{e^6+1} = -\frac{1}{12}\cdot\frac{e^{-3}}{\operatorname{ch}3}, \quad C_2 = -\frac{1}{6}\cdot\frac{e^6}{e^6+1} = -\frac{1}{12}\cdot\frac{e^{3}}{\operatorname{ch}3},$$
$$C_3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3-e^{-3\sqrt{12/11}}}{\operatorname{sh}\left(3\sqrt{12/11}\right)}, \quad C_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{3\sqrt{12/11}}-3}{\operatorname{sh}\left(3\sqrt{12/11}\right)}.$$

Подставляя эти значения в формулы (1.23), после несложных упрощений окончательно находим

$$u(x,1) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{\operatorname{ch}(2x-3)}{\operatorname{ch}3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{3\operatorname{sh}\left(x\sqrt{12/11}\right)-\operatorname{sh}\left[(x-3)\sqrt{12/11}\right]}{\operatorname{sh}\left(3\sqrt{12/11}\right)} - \left(x+\frac{4}{3}\right),$$

$$u(x,2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\operatorname{ch}(2x-3)}{\operatorname{ch}3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{3\operatorname{sh}\left(x\sqrt{12/11}\right)-\operatorname{sh}\left[(x-3)\sqrt{12/11}\right]}{\operatorname{sh}\left(3\sqrt{12/11}\right)} - \left(x+\frac{5}{3}\right).$$

2 Контрольные вопросы

1. Что представляет собой уравнение Пуассона и в каких задачах оно возникает?
2. В чем заключается идея метода прямых при решении краевых задач для уравнения Пуассона?
3. Как выполняется дискретизация области по пространственным переменным в методе прямых?
4. Каким образом дифференциальный оператор Лапласа заменяется разностным оператором?
5. Как строится система алгебраических уравнений после применения метода прямых?
6. Какие граничные условия (Дирихле, Неймана, смешанные) используются и как они учитываются в методе прямых?
7. Каковы основные требования сходимости и устойчивости метода прямых для уравнения Пуассона?
8. Какие численные методы применяются для решения полученной системы линейных уравнений?
9. Как влияет шаг сетки на точность численного решения?
10. В чем преимущества и недостатки метода прямых по сравнению с другими численными методами?

3 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–24].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1964, гл. I, IV.

[2] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 4, «Наука», 1966, лекции I—IV.

[3] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 3, Физматгиз, 1961, гл. I и III.

[4] Кошляков Н. С., Основные дифференциальные уравнения математической физики, изд. 4, ОНТИ, 1936, гл. I.

[5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, изд. 18, т. II, Физматгиз, 1962, гл. VIII.

[6] Колгатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.

[7] Милин В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955, гл. VIII.

[8] Рябенький В. С. и Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956, гл. I, II.

[9] Панов Д. Ю., Справочник по численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, «Наука», 1966.

[10] Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Физматгиз, 1960.

[11] Современная математика для инженеров, под ред. Беккенбаха Э. Ф., гл. II, Браун Дж. В., Методы Монте-Карло, ИЛ, 1958.

[12] Демидович Б. П. и Марон И. А., Основы вычислительной математики, изд. 3, Гостехиздат, 1951, гл. XVII.

[13] Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа, ИЛ, 1956, гл. VIII.

[14] Мороз Ф. М. и Кимбелл Дж. Е., Методы исследования операций. Приложения, «Советское радио», 1956.

[15] Математика в СССР за сорок лет, т. I, Физматгиз, 1959, Гаврунин М. К., Канаторович Л. В., Приближенные и численные методы.

[16] Положий Г. Н. и др., Математический практикум, Физматгиз, 1960, гл. VII.

[17] Гутенмахер Л. И., Электрические модели, Изд. АН СССР, 1940.

[18] Кобринский Н. Е., Математические машины непрерывного действия, Гостехиздат, 1954.

[19] Китов А. И., Криницкий Н. А., Электронные цифровые машины и программирование, изд. 2, Физматгиз, 1961, гл. VIII.

[20] Гурса Э. Ж., Курс математического анализа, т. 3, ГТТИ, 1933, гл. XXVII.

[21] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. XI.

[22] Березкин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, изд. 3, «Наука», 1966, т. II, гл. X.

[23] Слободянский М. Г., Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругого статики, Прикл. матем. и мех. 3, вып. 1 (1939).

[24] Ланс Дж. Н., Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, ИЛ, 1962.